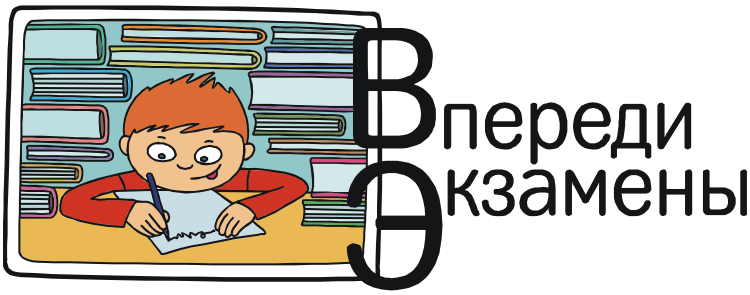


Богомолова Ольга Борисовна,
Усенков Дмитрий Юрьевич

ДВЕ ЗАДАЧКИ В КОПИЛКУ БУДУЩЕГО ЕГЭ

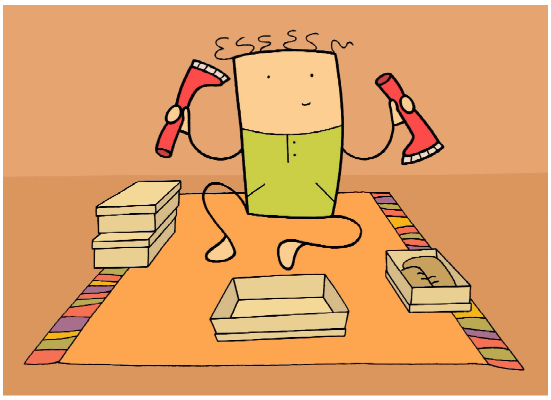
Начался сезон подготовки к следующему ЕГЭ. На подходе новые тренажи и диагностики. И, соответственно, новые задачи. Продолжаем знакомить с ними наших читателей.

Задача 1. Автомат обрабатывает натуральное число N ($128 \le N \le 255$) по следующему алгоритму:

1. Строится восьмибитная двоичная запись числа N.
2. Все цифры двоичной записи заменяются на противоположные (0 на 1, а 1 на 0).
3. Полученное число переводится в десятичную запись.
4. Из исходного числа вычитается полученное, разность выводится на экран.

Пример.

Дано число $N = 131$. Алгоритм работает следующим образом:



Если заменить все единицы на нули, а нули на единицы, то мы получаем «инверсное» число...

1. Восьмибитная двоичная запись числа N: 10000011.
2. Все цифры заменяются на противоположные, новая запись: 01111100.
3. Десятичное значение полученного числа: 124.
4. На экран выводится число: $131 – 124 = 7$.

Какое число нужно ввести в автомат, чтобы в результате получилось 105?

Комментарий

Это – одна из задач, которые в ЕГЭ имеют номер 6. И в данном случае мы имеем дело с крайне редкой на ЕГЭ ситуацией, когда составители заданий не усложнили, а наоборот, существенно облегчили жизнь учащимся. В отличие от предыдущих версий подобных задач «про автомат» здесь решение можно получить буквально за минуту! (Если, конечно, понимать основы двоичной арифметики.)

Решение

1. Задано число размером ровно в 8 бит.
2. Если заменить все единицы на нули, а нули на единицы, то мы получаем «инверсное» число (M).
3. Что будет, если такое «инверсное» число ***сложить*** с исходным? Очевидно, в каждом разряде единица суммируется с нулем, и тогда в каждом разряде суммы будет единица. Значит, для 8-битного числа ***сумма*** исходного числа и полученного ***всегда*** равна 255.

4. В итоге мы получаем систему из двух простейших уравнений:

$$\begin{cases} N + M = 255, \\ N - M = 105 \quad \text{(по условию).} \end{cases}$$

Решить ее можно путем почленного сложения уравнений. Получаем:

$2 \times N = 255 + 105$, откуда $2 \times N = 360$, тогда исходное число $N = 180$.

Вот и всё!

Ответ: 180.

Задача 2. Для какого наименьшего целого неотрицательного числа A выражение

$(2x + 3y < A) \vee (x > y) \vee (y > 24)$

тождественно истинно при любых целых неотрицательных x и y?

Комментарий

Здесь, к сожалению, дело обстоит не так просто, как в предыдущей задаче. Задания на логические уравнения с параметром, имеющие в ЕГЭ номер 18, традиционно вызывают у одиннадцатиклассников трудности. Но решать такие задачи все-таки научиться можно!

Решение

1. Достаточно, чтобы выполнялось одно из трех условий, объединенных операцией ИЛИ:

$2x + 3y < A$

$x > y \quad \rightarrow \quad y < x$

$y > 24$

2. Изображаем соответствующие области для выражений, ***в которых нет параметра***, на координатной системе (для большей наглядности – с соблюдением тех же цветовых выделений, что и в записи самих выражений). При этом чертеж выполняется только в I-й координатной четверти, так как по условию x и y положительны (рис. 1).

3. Там, где эти области закрашены, условие равенства исходного выражения «истине» обеспечивается и без параметра A. Нам же надо «прикрыть» третьим условием оставшуюся пустую (белую) область вблизи оси y:

$2x + 3y < A$ → $3y < -2x + A$ → *опорная прямая* $3y = -2x$ → $y = -2/3\ x$ → *точки, через которые проходит опорная прямая:* $(x = 0, y = 0)$, $(x = 3, y = -2)$

Затем перенесем полученную прямую параллельно самой себе, поднимая ее вверх на значение A, чтобы эта прямая прошла через точку пересечения предыдущих прямых (рис. 2).

4. Ищем координаты точки пересечения первых двух прямых:

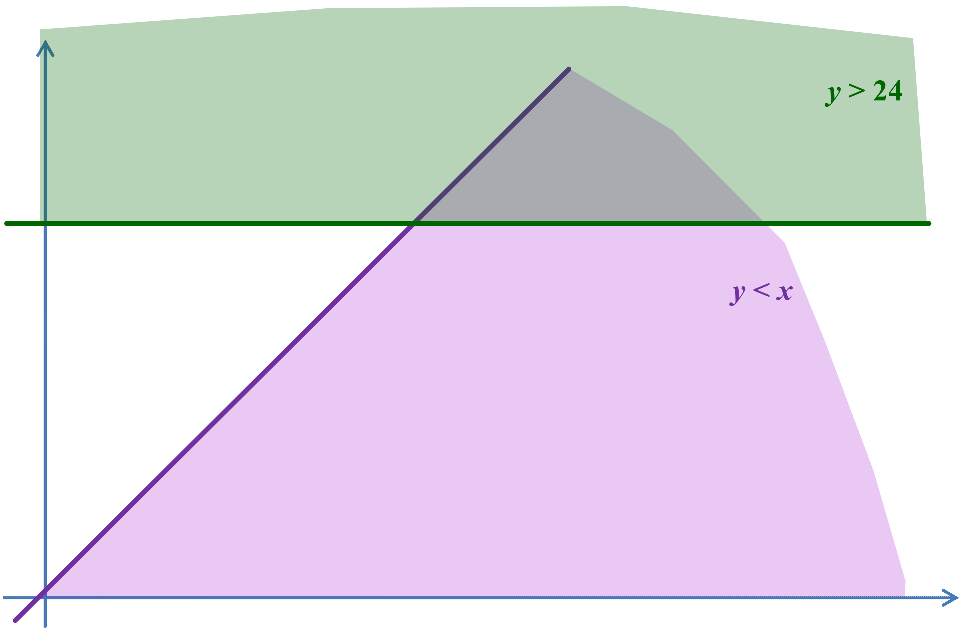


Рис. 1

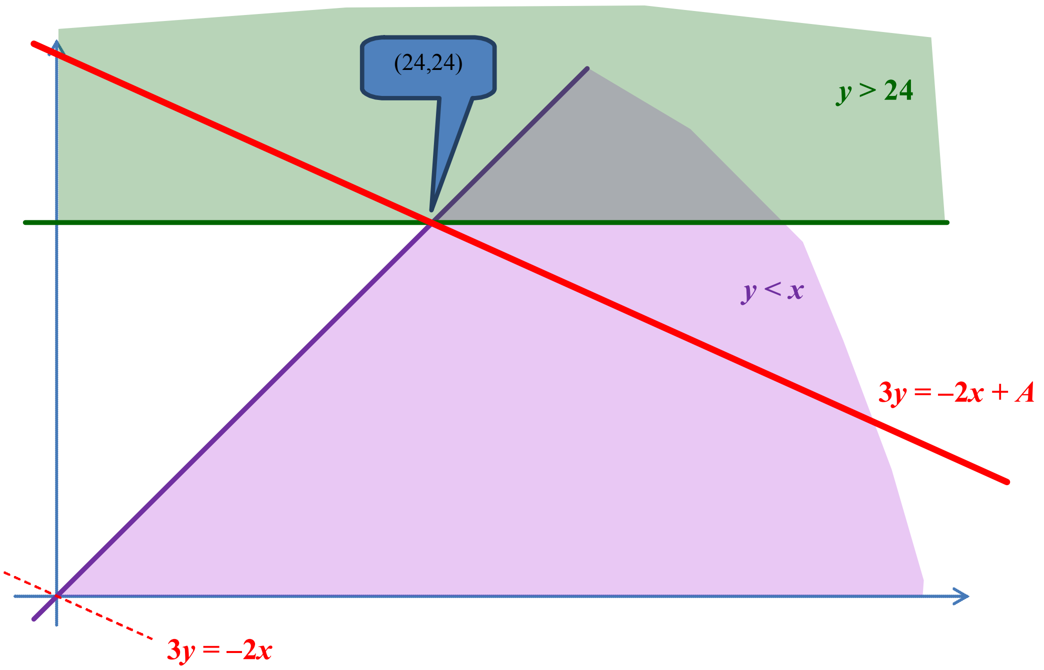


Рис. 2

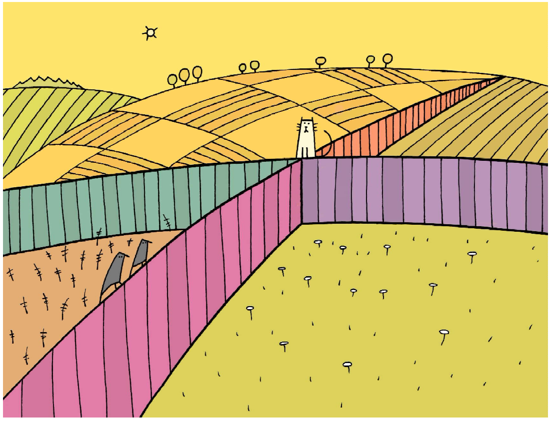
$$\begin{cases} y = x, \\ y = 24. \end{cases} \rightarrow (24, 24).$$

5. Подставляем эту точку в уравнение искомой прямой и ищем A:

$2x + 3y < A \rightarrow A > 2x + 3y \rightarrow$
$\rightarrow A > 2 \cdot 24 + 3 \cdot 24 \rightarrow A > 120$

6. Поскольку значение $A = 120$ соответствует прямой, точно проходящей через точку пересечения первых двух прямых, а неравенства у нас – строгие, эта точка все еще остается не «прикрытой» нашей новой областью. Поэтому мы берем следующее большее натуральное значение $A = 121$.

Ответ: 121.



При этом чертеж выполняется только в I-й координатной четверти, так как по условию x и y положительны.

Богомолова Ольга Борисовна, ***доктор педагогических наук, почетный работник сферы образования Российской Федерации, Заслуженный учитель города Москвы, учитель информатики и математики ГБОУ СОШ № 1360, г. Москва,***

Усенков Дмитрий Юрьевич, ГБОУ СОШ № 1360, г. Москва.